

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ ИЗ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

*Л.У. Султанов, Л.Р. Фахрутдинов*

### Аннотация

Работа посвящена построению методики численного решения задачи о больших деформациях трехмерных тел из гиперупругих материалов с использованием меры деформации Фингера. Дается кинематика движения среды, напряженное состояние описывается тензором истинных напряжений Коши. Рассмотрен пример получения линеаризованных физических соотношений в напряжениях Коши. Численная реализация основана на методе конечных элементов в рамках инкрементального метода.

**Ключевые слова:** гиперупругие материалы, конечные деформации, метод конечных элементов, резиноподобные материалы.

### 1. Введение

К гиперупругим материалам относят различные эластомеры, и другие подобные полимеры, отличительной особенностью которых является то, что они допускают большие деформации, сохраняя при этом упругие свойства. С точки зрения МДТТ речь идет о нелинейно упругих телах, при деформировании которых необходимо учитывать геометрическую нелинейность в рамках больших деформаций. Подобного рода проблемы рассматриваются во многих статьях и обобщены в ряде монографий, среди которых можно выделить работы [1–9]. В них приводится обширная библиография по данному вопросу и изложены основные положения по построению определяющих соотношений, и в данной статье этот материал активно используется. Из числа журнальных публикаций можно отметить статьи [10–19], посвященные гиперупругим материалам, в которых также рассматриваются различные варианты построения определяющих соотношений для определенных типов материалов и приводятся примеры решения задач. Методика, описанная здесь, в идейном плане близка к методам, использованным в работах [15–19]. Соотношения приводятся в наиболее компактной форме прямого тензорного исчисления. Для подробного ознакомления с методами и технологией работы с такой формой записи можно обратиться к работам [1, 3, 5].

### 2. Кинематика среды

В глобальной неподвижной системе координат с ортами  $\vec{e}_i$ , рассмотрим положения исследуемого деформируемого тела:

$\vec{r}(\xi^j) = x^i(\xi^j) \vec{e}_i$  – радиус-вектор материальной частицы в недеформированном состоянии;

$\vec{R}(\xi^j) = y^i(\xi^j) \vec{e}_i$  – радиус-вектор материальной частицы в деформированном состоянии;

$\vec{u}(\xi^j) = \vec{R}(\xi^j) - \vec{r}(\xi^j) = u^i(\xi^j) \vec{e}_i$  – вектор перемещения;

$\vec{v}(\xi^j) = \dot{\vec{R}}(\xi^j) = \dot{y}^i(\xi^j) \vec{e}_i = v^i(\xi^j) \vec{e}_i$  – вектор скорости;

Базовым тензором, играющим ключевую роль в кинематике конечных деформаций, является тензор градиента деформаций:

$$(F) = \left( \vec{\nabla}_x \vec{R} \right)^T = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} (\vec{e}_i \vec{e}_j).$$

В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации используются:

левый тензор Коши – Грина (мера деформации Фингера):

$$(B) = (F) \cdot (F)^T;$$

тензор пространственного градиента скорости:

$$(h) = \left( \dot{F} \right) \cdot (F^{-1});$$

тензор деформации скорости:

$$(d) = \frac{1}{2} \left[ (h) + (h)^T \right] = \frac{1}{2} \left[ \left( \dot{F} \right) \cdot (F^{-1}) + (F^{-1})^T \cdot \left( \dot{F} \right)^T \right].$$

### 3. Определяющие соотношения

Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений  $(\Sigma) = \sigma_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ , определенного в актуальном состоянии.

В качестве аргументов функции потенциальной энергии деформации примем компоненты тензора меры деформации Фингера, т.е. :  $W = W(B_{ij})$ , также вводятся в рассмотрение меры деформации, которые не сопровождаются изменением объема:

$$\left( \hat{B} \right) = J^{-\frac{2}{3}} (B).$$

Здесь  $J = dV/dV_0$  – относительное изменение объема. Имеем:

$$W = W_0(J) + W'(I_{1\hat{B}}, I_{2\hat{B}}),$$

Тогда тензор напряжений Коши-Эйлера будет выражаться в следующем виде:

$$(\Sigma) = \frac{2}{J} (B) \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial B} \right).$$

Скорости изменения напряжений Коши – Эйлера:

$$\left( \dot{\Sigma} \right) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d},$$

где введено обозначение

$$(\Lambda_\Sigma) = \frac{4}{J} (B) \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial B \partial B} \right) \cdot (B).$$

В результате получаем физическое соотношение для производной Трусделла в виде линейного уравнения:

$$(\Sigma^{Tr}) = \left( \dot{\Sigma} \right) - (h) \cdot (\Sigma) - (\Sigma) \cdot (h)^T + I_{1d} (\Sigma) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d).$$

Таким образом, для гиперупругого тела определяющие соотношения для скоростей имеет вид линейной зависимости при использовании обобщенной производной Трусделла для тензора истинных напряжений Коши – Эйлера и тензора деформации скорости.

#### 4. Алгоритм решения

Для решения задачи используется метод последовательных нагружений. Считается, что известно  $k$ -ое состояние, по которому нужно найти  $(k+1)$ -ое состояние. В качестве базового уравнения используется уравнение виртуальных мощностей, записанного для  $(k+1)$  шага:

$$\iiint_{V_{k+1}} ({}^{k+1}\Sigma) \cdot (\delta {}^{k+1}d) dV = \iiint_{V_{k+1}} {}^{k+1}\vec{f} \cdot \delta \vec{v} dV + \iint_{S_{k+1}^\sigma} {}^{k+1}\vec{t}_n \cdot \delta \vec{v} dS,$$

где  $V_{k+1}$  – текущий объем;  $S_{k+1}^\sigma$  – часть его поверхности, на которой заданы усилия,  $\vec{f}$ ,  $\vec{t}_n$  – векторы массовых и поверхностных сил. Переходя к приращениям, получим разрешающее уравнение, из которого найдем вектор перемещений для текущего шага

$$\Delta {}^k \vec{u} = \Delta {}^k x_i \vec{e}_i,$$

который определяет следующую конфигурацию:

$${}^{k+1} \vec{R} = {}^k \vec{R} + \Delta \vec{u}.$$

Тогда напряженное состояние находится по соотношению:

$$({}^{k+1}\Sigma) = \frac{2}{J} ({}^{k+1}B) \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial {}^{k+1}B} \right).$$

Рассмотрен пример построения физических соотношений для материала, заданного потенциалом упругих деформаций:

$$W = U_1(I_{1\hat{B}} - 3) + U_2(I_{2\hat{B}} - 3) + \frac{K}{2}(J - 1)^2,$$

где  $W_0(J) = \frac{K}{2}(J - 1)^2$ ,  $W'(I_{1\hat{B}}, I_{2\hat{B}}) = U_1(I_{1\hat{B}} - 3) + U_2(I_{2\hat{B}} - 3)$ ,  $U_1, U_2$  – постоянные материала.

Тензор напряжений Коши-Эйлера для этого материала имеет вид:

$$(\Sigma) = 2U_1 J^{-\frac{5}{3}} \left[ (B) - \frac{1}{3} I_{1B} (I) \right] + 2U_2 J^{-\frac{7}{3}} \left[ I_{1B} (B) - \frac{1}{3} I_{1B}^2 (I) - \frac{2}{3} (B^2) \right] + K (J - 1) (I)$$

Линеаризуя полученное соотношение получим выражение для скорости изменения напряжений Коши – Эйлера:

$$(\Delta \Sigma) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d},$$

где

$$(\Lambda_\Sigma) = (\Lambda_{\Sigma'}) + (\Lambda_{\sigma_0}), \quad \Lambda_{\Sigma'} = \frac{4}{J} (B) \cdot \left( \frac{\partial^2 W'}{\partial B \partial B} \right), \quad \Lambda_{\sigma_0} = \frac{4}{J} (B) \cdot \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial B \partial B} \right).$$

Таким образом, получена система уравнений для определения напряженного состояния, которая может быть дискретизирована методом конечных элементов для получения численных решений.

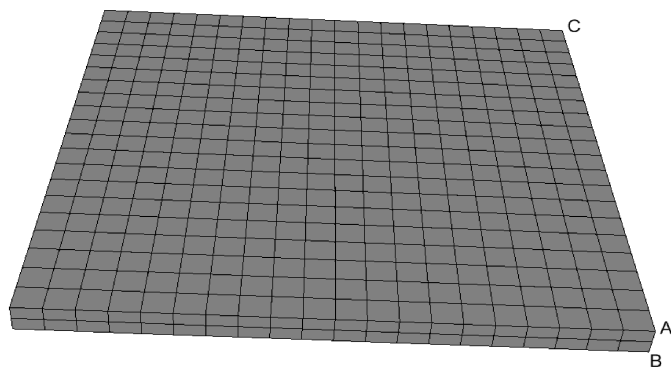


Рис. 1. Конечно-элементная модель плиты

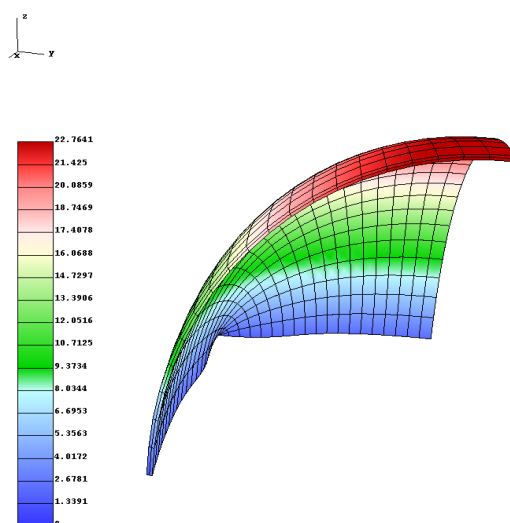


Рис. 2. Поле вертикальных перемещений плиты

## 5. Численный пример

Для проверки работоспособности методики был решен ряд задач, рассмотрим одну из них: Задача об упругом деформировании плиты под действием равномерно-го давления  $q = 85 \text{ МПа}$ . Верхнее ребро плиты не имеет вертикального смещения. Плита – квадратная со стороной  $a=0.02 \text{ м}$  и толщиной  $h=0.01 \text{ м}$ .  $K = 2000 \text{ ГПа}$ . На рисунке 1 изображено недеформированное состояние плиты: На рисунках 2,

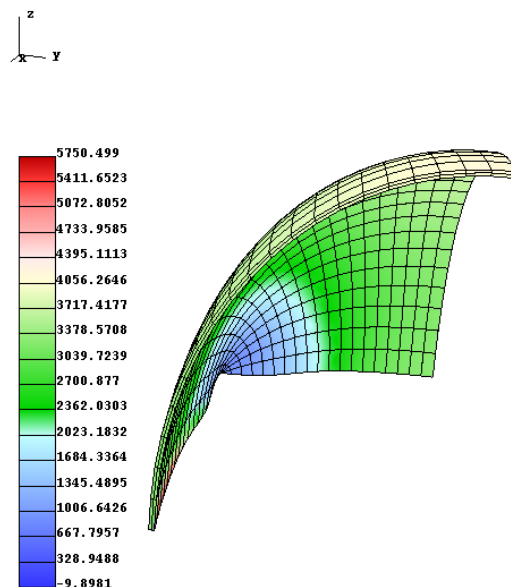


Рис. 3. Поле касательных напряжений плиты

3 изображено поле вертикальных перемещений и поле касательных напряжений: Таким образом, была построена методика численного исследования гиперупругих слабосжимаемых материалов с использованием меры деформации Фингера, для которых физические соотношения задаются с помощью упругого потенциала. Получены линеаризованные определяющие соотношения и разрешающее уравнение для потенциала Муни – Ривлина. Численная реализация основана на методе конечных элементов на базе восьмиузлового полилинейного элемента. Решенные задачи демонстрируют работоспособность полученной методики исследования нелинейно упругих задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-97058, 13-01-97059, 12-01-00955, 12-01-97026).

### Summary

*L.U. Sulkanov, L.R. Fakhrutdinov.* Numerical calculation of large deformations of hyperelastic solids.

In the present paper the technique of investigation of large deformations using the Finger strain measure is considered. The kinematics of motion of continua is given; the stress state is described by the Cauchy tensor of the true stresses. Also there is an example of obtaining the linearized physical ratio in the Cauchy stresses. The numerical implementation is based on the finite element method within the framework of incremental methods.

**Key words:** hyperelastic materials, finite deformations, finite element analysis, rubbery materials.)

## Литература

1. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 465 с.
2. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
3. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
4. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
5. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск, 2000. – 262 с.
6. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
7. Елисеев В.В. Механика упругих тел. – С.-Петербург, СПбГТУ, 1999. – 341 с.
8. Голованов А.И., Султанов Л.У. Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань: Казанск. гос. ун-т, 2008. – 165 с.
9. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. – 1997. – 283 p.
10. Голованов А.И., Султанов Л.У. Исследование закритического упругопластического состояния трехмерных тел с учетом конечных деформаций // Известия вузов. Авиационная техника. – 2008. – №4. – С. 13–16.
11. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2008. – Т. 150, Кн 1. – С. 29–37.
12. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2008. – Т. 150, Кн 3. – С. 122–132.
13. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел III. Постановки задачи и алгоритмы решения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2009. – Т. 151, Кн 3. – С. 108–120.
14. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел IV. Конечноеэлементная реализация. Примеры решения задач // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, Кн 4. – С. 115–126.
15. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У. Численный алгоритм решения задачи о больших упругопластических деформациях МКЭ // Вестник ПНИПУ. Механика. – Пермь: Изд-во ПНИПУ – 2013. – №1. – С. 81–93.
16. Султанов Л.У., Давыдов Р.Л. Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов // Инженерно-строительный журнал —Санкт-Петербург: СПбГУ. – 2013. – №9(44). – С. 64–68.
17. Golovanov A.I., Sultanov L.U. Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies// International Applied Mechanics. – 2005. – V. 41. – №6. – P. 614–620.

18. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикладная механика. – Киев – 2005. – Т. 41. – №6. – С. 36–43.
19. Sultanov L.U., Davydov R.L. Mathematical modeling of large elastic-plastic deformations // Applied Mathematical Sciences. — V. 8.(57–60) – 2014. – P. 2991–2996.

---

Сведения о каждом из авторов статьи

**Султанов Ленар Усманович** – к. ф-м. н, доцент, доцент кафедры теоретической механики ИММ им. Лобачевского, К(П)ФУ, E-mail: *Lenar.Sultanov@kpfu.ru*

**Фахрутдинов Ленар Рустамович** – аспирант кафедры теоретической механики ИММ им. Лобачевского, К(П)ФУ, E-mail: *Bishchumbek@gmail.com*.